

Introdução à Lógica e ao Raciocínio Lógico



O papel da lógica é o estudo do raciocínio. Você sabe quais são as ferramentas utilizadas pela análise lógica? Conhece as formas de avaliar a informação que recebemos enquanto interagimos conscientemente com o mundo? Nesta Unidade de Aprendizagem, você vai aprender quais são essas formas e entender os primeiros passos para entrar no mundo da lógica: conteúdo de verdade e componente lógico, assim como suas fontes potenciais de erros.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Relacionar as definições de inferência, proposição, premissa, conclusão.
- Definir sentenças falsas e sentenças verdadeiras.
- Reconhecer a construção de uma tabela-verdade.



O processo de racionalização lógica é o "lugar" no qual as informações são ordenadas para então serem racionalizadas e organizadas, alcançando uma determinada conclusão. Ao ver determinada cena, por exemplo, imediatamente chegamos a uma determinada conclusão, por meio do que está implícito naquilo que estamos vendo.

RACIOCÍNIO LÓGICO

Estamos imersos em um mundo de informações, mas juntamente com a informação, diversas afirmações são apresentadas. Cabe a nós saber organiza-las da melhor maneira possível a fim de tomar decisões. Nesse sentido, a Lógica Matemática pode nos ajudar.









Proposição - Um enunciado que é ou verdadeiro, ou falso.



Premissa - Uma proposição (ou conjunto de proposições) que é dada como fundamentação para uma conclusão.



Conclusão - A parte final de uma inferência; a proposição que se pretende obter a partir das premissas.



Inferência - Um conjunto de proposições, nas quais as premissas são apresentadas como fundamentação da conclusão.



Relação Lógica - A conexão lógica entre premissas e conclusões.



Inferência

Premissas - 1. Os alunos de Lógica são estudiosos. 2. Flávio é aluno de Lógica.

Conclusão - 3. Flávio é estudioso.

Proposições

Neste caso, se as premissas forem aceitas como verdadeiras, então a relação (R) entre essas três proposições será tal que a conclusão deve ser verdadeira.

1. Os alunos de Lógica são estudiosos.

Inferência

Conclusão

45

Premissas

2. Alice é aluna de Lógica.

Proposições

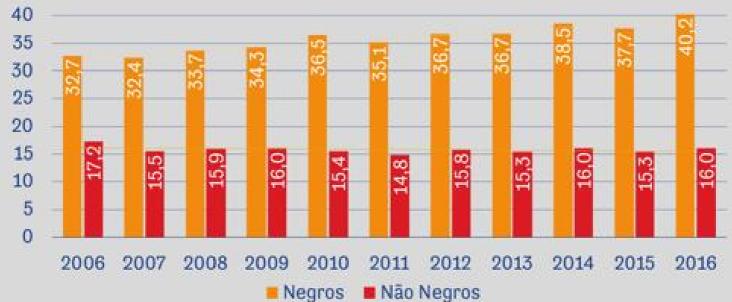
3. Alice não é estudiosa.

(R) entre essas três proposições será tal que a conclusão deve ser falsa.

Comparação: Taxas de homicídios de negros

Neste caso, se as premissas forem aceitas como verdadeiras, então a relação

e não negros por 100mil habitantes





A lógica matemática é fundamental para o desenvolvimento de linguagens e demonstrações, por isso está presente em diversos cursos na área de ciências exatas e Filosofia. Acompanhe na obra *Matemática Discreta para Computação e Informática* a seguir as definições dos principais conceitos e simbologias que são utilizadas ao se trabalhar com a Lógica Matemática, como por exemplo, proposições, conectivos e tabela-verdade. O capítulo noções de lógica e técnicas de demonstração servirá como base teórica para esta unidade de aprendizagem

Boa leitura.



□□ 4ª edição





A lógica matemática é básica para qualquer estudo em computação e informática e em matemática discreta. A abordagem é centrada em lógica booleana (estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças verdadeiras de falsas). A lógica permite definir a noção de teorema, sendo que sua importância transcende a usual na matemática: eventualmente pode ser visto como um problema a ser implementado computacionalmente e a sua demonstração, um algoritmo que soluciona o problema. Para desenvolver provas de teoremas, são estudadas técnicas de demonstração. Relacionada à lógica, é introduzida a hipótese de Church, que é uma premissa básica para toda a computação e informática.

Lógica matemática é básica para qualquer estudo em computação e informática e, em particular, para o estudo de matemática discreta. De fato, para desenvolver qualquer algoritmo e, consequentemente, qualquer software computacional, são necessários conhecimentos básicos de lógica. Inclusive, existem linguagens de programação baseadas em lógica, ou seja, desenvolvidas segundo o paradigma lógico, como, por exemplo, a linguagem Prolog.

As Diretrizes Curriculares do MEC para Cursos de Computação e Informática (Brasil, [20--?]) destacam que:

Lógica matemática é uma ferramenta fundamental na definição de conceitos computacionais

E, para algumas matérias da área de formação tecnológica, como inteligência artificial, esse texto destaca, enfaticamente que:

Como base ao estudo da inteligência artificial são **imprescindíveis** conhecimentos de lógica matemática,...

Lógica permite definir a noção de *teorema*. Em um primeiro momento, pode parecer estranho que teoremas e suas correspondentes demonstrações sejam fundamentais para a computação e informática. Entretanto, em computação, um teorema frequentemente pode ser visto como um problema a ser implementado computacionalmente, e a sua correspondente *demonstração*, pode ser vista como uma solução computacional, ou seja, um *algoritmo*. Adicionalmente, o algoritmo que soluciona o problema, prova-se, sempre funciona!

Para ilustrar a importância desse assunto para a computação e informática, David Parnas, importante pesquisador internacional e um dos pioneiros da *engenharia de software*, afirmou em uma palestra no XIII SBES – Simpósio Brasileiro de Engenharia de *Software* que:

o maior avanço da engenharia de software nos últimos dez anos foram os provadores de teoremas

O principal objetivo deste capítulo é introduzir, resumidamente, os principais conceitos e a terminologia de *lógica matemática* e de *técnicas de demonstração de teoremas* necessários para o estudo de matemática discreta. Esta não é, portanto, uma abordagem ampla detalhada. Tal abordagem foge do escopo deste livro e normalmente é desenvolvida em uma disciplina específica de Lógica. Relacionado à lógica, é introduzida a *Hipótese de Church* a qual é uma *premissa básica* para toda a computação e informática.

O texto que segue é centrado em lógica booleana. Entende-se por *lógica booleana* ou *lógica de Boole* o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças ver-

dadeiras de falsas. George Boole (inglês, 1815-1864) foi um dos precursores do estudo da lógica.

2.1.1 proposições

definição 2.1 - Proposição

Uma *proposição* é uma construção (sentença, frase, pensamento) à qual se pode atribuir juízo. No caso da *lógica matemática*, o tipo de juízo é o verdadeiro-falso, ou seja, o interesse é na "verdade" das proposições.

em lógica matemática, a forma tradicional de tratar com a "verdade" é considerar dois valores-verdade V e F (verdadeiro e falso, respectivamente) e estipular que as proposições só podem assumir esses dois valores. Para uma dada proposição p, denota-se por:

V(p)

o valor-verdade de p.

exemplo 2.1 – Proposição

a São exemplos de proposições:

Brasil é um país

Buenos Aires é a capital do Brasil

3 + 4 > 5

7 - 1 = 5

Para cada uma dessas proposições, o valor-verdade é como segue:

V(Brasil é um país) = V

V(Buenos Aires é a capital do Brasil) = **F**

V(3 + 4 > 5) = V

V(7 - 1 = 5) = F

b *Não* são exemplos de proposições:

Vá tomar banho.

Oue horas são?

Parabéns!

2.1.2 conetivos

As proposições introduzidas até o momento são ditas *proposições atômicas* ou simplesmente *átomos*, no sentido em que não podem ser decompostas em proposições mais simples.

Entretanto, é possível construir proposições mais complexas compondo proposições, usando operadores lógicos, também denominados de conetivos (lógicos).

exemplo 2.2 – Proposições compostas

Nas sequintes proposições (compostas), os conetivos lógicos estão representados em negrito:

- **a** *Windows* é um sistema operacional, **e** Pascal é uma linguagem de programação;
- **b** Vou comprar um PC **ou** um MAC;

•	Linux	nãο	á	ıım	software	livre:
•	LIIIUA	Hau	\subset	ulli	SULLIVATE	HIVIC,

d Se choverem canivetes, **então** todos os alunos estarão aprovados em matemática discreta;

 \bullet A = B se e somente se (A \subseteq B e B \subseteq A).

Claramente, proposições compostas podem ser usadas para construir novas proposições compostas, como no caso do último item no EXEMPLO 2.2 – Proposições Compostas. O mesmo exemplo ilustra cinco conetivos que serão estudados (e, ou, não, se-então e se-somente-se).

negação

Já foi visto que uma dada proposição **p** ou é **verdadeira** ou é **falsa**. A *negação* de uma proposição é construída, introduzindo-se a palavra *não* de forma apropriada ou prefixando-se a proposição por "não é fato que" (ou expressão equivalente).

exemplo 2.3 – Negação

Considere as seguintes proposições:

Brasil é um país;

Linux é um software livre;

3 + 4 > 5

A negação dessas proposições é como segue, respectivamente:

Brasil **não** é um país;

Linux não é um software livre;

Não é fato que 3 + 4 > 5.

Se **p** denota uma proposição, então a negação de **p** é denotada por:

¬**p** ou ~**p**

a qual é lida como:

"não **p**"

sendo interpretada como segue:

- se p é verdadeira, então ¬p é falsa;
- se p é falsa, então ¬p é verdadeira.

Uma tabela-verdade é uma tabela que descreve os valores lógicos de uma proposição em termos das possíveis combinações dos valores lógicos das proposições componentes e dos conetivos usados. Assim, para cada combinação de valores-verdade e de conetivos, a tabela-verdade fornece o valor-verdade da expressão resultante.

definição 2.2 – Negação

Dada uma proposição lógica **p**, a semântica da *Negação* ¬**p** é dada pela tabela-verdade ilustrada na figura 2.1. □

р	¬р
V	F
F	V

figura 2.1 Tabela-verdade: negação.

conjunção

A conjunção de duas proposições **p** e **q**, denotada por:

$$p \wedge q$$

a qual é lida:

reflete uma noção de simultaneidade para ser **verdadeira**. Assim, a proposição composta **p** \wedge **q** é:

- verdadeira, apenas quando p e q são simultaneamente verdadeiras;
- falsa, em qualquer outro caso.

definição 2.3 - Conjunção

Dadas duas proposições lógicas **p** e **q**, a semântica da *Conjunção* **p** ∧ **q** é dada pela tabela-verdade ilustrada na figura 2.2.

р	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

figura 2.2 Tabela-verdade: conjunção.

Relativamente à tabela-verdade da conjunção ilustrada na figura 2.2, observe que, para expressar todas as combinações possíveis de valores lógicos das proposições **p** e **q**, foram necessárias quatro linhas (quantas linhas seriam necessárias para expressar a combinação de todos os valores lógicos possíveis de **n** proposições?).

exemplo 2.4 - Conjunção

Sugere-se observar a tabela ilustrada na figura 2.2, durante a leitura deste exemplo, procurando justificar por que a proposição composta, em cada um dos itens abaixo, é **verdadeira** ou **falsa**:

a Verdadeira: *Windows* é um sistema operacional, **e** Pascal é uma linguagem de programação;

b Falsa: Windows é um sistema operacional, e Pascal é uma planilha eletrônica;

- **c Falsa**: *Windows* é um editor de textos, **e** Pascal é uma linguagem de programação;
- **d** Falsa: Windows é um editor de textos, **e** Pascal é uma planilha eletrônica.

■ disjunção

A disjunção de duas proposições **p** e **q**, denotada por:

$$p \vee q$$

a qual é lida:

reflete a noção de que pelo menos uma (eventualmente duas) das proposições componentes deve ocorrer para que a resultante seja **verdadeira**. Assim, a proposição composta **p** v **q** é:

- verdadeira, quando pelo menos uma das proposições é verdadeira;
- falsa, somente quando simultaneamente p e q são falsas.

definição 2.4 – Disjunção

Dadas duas proposições lógicas **p** e **q**, a semântica da *Disjunção* **p** v **q** é dada pela tabela-verdade ilustrada na figura 2.3.

р	q	pvq
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

figura 2.3 Tabela-verdade: **disjunção**.

exemplo 2.5 – Disjunção

Sugere-se observar a tabela ilustrada na figura 2.3, durante a leitura deste exemplo, procurando justificar por que a proposição composta, em cada um dos itens abaixo, é **verdadeira** ou **falsa**:

- **a Verdadeira**: *Windows* é um sistema operacional **ou** Pascal é uma linguagem de programação;
- **b** Verdadeira: Windows é um sistema operacional ou Pascal é uma planilha eletrônica;
- **c Verdadeira**: *Windows* é um editor de textos **ou** Pascal é uma linguagem de programação;
- **d** Falsa: Windows é um editor de textos **ou** Pascal é uma planilha eletrônica.

condição

A condição envolvendo duas proposições **p** e **q**, denotada por:

$$p \rightarrow q$$

a qual é lida:

"se p então q"

reflete a noção de que, a partir de uma premissa verdadeira (ou seja, \mathbf{p} é verdadeira), obrigatoriamente deve-se chegar a uma conclusão verdadeira (ou seja, \mathbf{q} é verdadeira), para que a proposição composta $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ seja verdadeira. Entretanto, partindo de uma premissa falsa, qualquer conclusão pode ser considerada. Assim, a proposição composta $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ é:

- falsa, quando p é verdadeira e q é falsa;
- verdadeira, caso contrário.

definição 2.5 - Condição

Dadas duas proposições lógicas \mathbf{p} e \mathbf{q} , a semântica da *Condição* $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ é dada pela tabela-verdade ilustrada figura 2.4.

р	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

figura 2.4 Tabela-verdade: condição.

exemplo 2.6 – Condição

Sugere-se observar a tabela ilustrada na figura 2.4, durante a leitura deste exemplo, procurando justificar por que a proposição composta, em cada um dos itens abaixo, é **verdadeira** ou **falsa**:

- **a Verdadeira**: **se** *Windows* é um sistema operacional, **então** Pascal é uma linguagem de programação;
- **b** Falsa: se *Windows* é um sistema operacional, então Pascal é uma planilha eletrônica;
- **c Verdadeira**: **se** *Windows* é um editor de textos, **então** Pascal é uma linguagem de programação;
- **d Verdadeira**: **se** *Windows* é um editor de textos, **então** Pascal é uma planilha eletrônica.

■ bicondição

A bicondição envolvendo duas proposições **p** e **q**, denotada por:

$$p \leftrightarrow q$$

a qual é lida:

"p se e somente se q"

reflete a noção de condição "nos dois sentidos", ou seja, considera simultaneamente:

- sentido de "ida": **p** é premissa e **q** é conclusão;
- sentido de "volta": **q** é premissa e **p** é conclusão.

Portanto, considerando a noção de condição já introduzida e considerando que esta é "nos dois sentidos", a proposição composta $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ é:

- verdadeira, quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas;
- falsa, quando as proposições p e q possuem valor-verdade distintos.

definição 2.6 - Bicondição

Dadas duas proposições lógicas **p** e **q**, a semântica da *Bicondição* **p** ↔ **q** é dada pela tabela-verdade ilustrada na figura 2.5.

р	q	p⇔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

figura 2.5 Tabela-verdade: bicondição.

exemplo 2.7 – Bicondição

Sugere-se observar a tabela ilustrada na figura 2.5, durante a leitura deste exemplo, procurando justificar por que a proposição composta, em cada um dos itens abaixo, é **verdadeira** ou **falsa**:

- **a Verdadeira**: *Windows* é um sistema operacional **se e somente se** Pascal é uma linguagem de programação;
- **b** Falsa: Windows é um sistema operacional se e somente se Pascal é uma planilha eletrônica;
- **c** Falsa: Windows é um editor de textos se e somente se Pascal é uma linguagem de programação;
- **d Verdadeira**: *Windows* é um editor de textos **se e somente se** Pascal é uma planilha eletrônica.

2.1.3 fórmulas, linguagem lógica e tabelas-verdade

Fórmulas lógicas ou simplesmente fórmulas são as palavras da linguagem lógica. O conceito de fórmula é formalmente introduzido adiante, quando do estudo da definição indutiva, mas pode ser facilmente entendido como sendo uma sentença lógica corretamente construída sobre o alfabeto cujos símbolos são conetivos (Λ , V, \rightarrow , etc.), parênteses, identificadores (\mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r} , etc.), constantes, etc. Se uma fórmula contém variáveis, então esta *não* necessariamente possui valor-verdade associado. Ou seja, seu valor lógico depende do valor-verdade das sentenças que substituem as variáveis na fórmula.

exemplo 2.8 - Fórmulas

Suponha que **p**, **q** e **r** são sentenças variáveis. Então, são fórmulas:

a Os valores-verdade constantes **V** e **F**

b Qualquer proposição

c p, qer

 \mathbf{d} $\neg p, p \land q, p \lor q, p \rightarrow q e p \leftrightarrow q$

e p v (¬q)

f $(p \land \neg q) \rightarrow F$

 $g \neg (p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

 $\overline{\mathbf{h}}$ p v (q \wedge r) \leftrightarrow (p v q) \wedge (p v r)

Com o objetivo de possibilitar a redução do número de parênteses e, consequentemente, simplificar visualmente as fórmulas, a seguinte ordem de precedência entre os conetivos é convencionada. A ordem é a seguinte:

- 1. Conetivos entre parênteses, dos mais internos para os mais externos;
- 2. Negação (¬);
- 3. Conjunção (ʌ) e disjunção (v);
- 4. Condição (→);
- 5. Bicondição (↔).

exemplo 2.9 - Precedência de conetivos

a p v (¬q) é equivalente a **p** v ¬q

 $(p \land \neg q) \rightarrow F$ é equivalente a $p \land \neg q \rightarrow F$

d para a fórmula p v (q ∧ r) ↔ (p v q) ∧ (p v r) qualquer omissão de parênteses resulta em ambiguidade (por quê?)

As tabelas-verdade foram introduzidas quando da definição dos conetivos. Entretanto, como construir uma tabela-verdade de uma dada fórmula? Lembre-se de que a tabela-verdade deve explicitar todas as combinações possíveis dos valores lógicos das fórmulas atômicas componentes. Observe que:

- cada fórmula atômica não constante pode assumir dois valores lógicos: V e F. Obviamente, uma fórmula atômica constante possui um valor-verdade fixo (V ou F);
- portanto, na tabela-verdade da negação ilustrada na figura 2.1 (p. 43) duas linhas são suficientes para expressar os valores lógicos possíveis;

- para as tabelas com duas fórmulas atômicas (não constantes), como as da conjunção (figura 2.2, p. 43) e da condição (figura 2.4, p. 45), são necessárias quatro linhas, ou seja, 2² possíveis combinações dos valores lógicos;
- de fato, é fácil verificar que, para n fórmulas atômicas (não constantes), são necessárias 2ⁿ linhas na tabela-verdade para expressar todas as combinações possíveis de valores lógicos.

Tal fato, bem como a técnica de construção de tabelas-verdade, é ilustrado nos exemplos que seguem.

exemplo 2.10 – Tabela-verdade

Os passos de construção da tabela-verdade para a fórmula **p** v ¬**q** são ilustrados na figura 2.6, da esquerda para a direita. Observe que:

- a tabela possui $4 = 2^2$ linhas, pois se trata de duas fórmulas atômicas;
- as duas primeiras colunas expressam as combinações possíveis de p e q;
- a terceira coluna é introduzida e corresponde à negação de q, ou seja, à fórmula ¬q;
- a quarta coluna corresponde à disjunção de p com ¬q, ou seja, p v ¬q, a qual contém o resultado desejado.

р	q	р	q	¬q	_	р	q	¬q	p v ¬ q
V	V	V	V	F	_	V	V	F	V
V	F	V	F	V	_	V	F	٧	V
F	V	F	V	F	_	F	٧	F	F
F	F	F	F	V	_	F	F	V	V

figura 2.6 Passos de construção de uma tabela-verdade.

exemplo 2.11 – tabela-verdade

A fórmula $p \land \neg q \rightarrow F$ possui 3 proposições atômicas. Entretanto, como a fórmula atômica F é constante, não é considerada no cálculo do número de linhas. Assim, a tabela-verdade possui $4 = 2^2$ e é ilustrada na figura 2.7. Observe que não foi introduzida uma coluna para o valor constante F, pois a sua introdução seria redundante (a coluna conteria somente F).

р	q	¬q	рл¬q	$p \land \neg q \rightarrow F$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	٧	F	F	V
F	F	V	F	V

figura 2.7 Tabela-verdade.

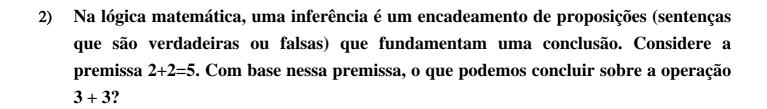
Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra. O jogo de xadrez é um ótimo exemplo de raciocínio lógico e mais: ele auxilia no desenvolvimento da capacidade de concentração quando utilizado como atividade paralela à aprendizagem. O respeito ao adversário, a paciência e a tomada de decisões também são pontos extremamente importantes e mais bem desenvolvidos quando a criança é exposta a esse tipo de raciocínio.

O vídeo apresenta o exemplo do jogo de xadrez e a consequente composição da tabela-verdade.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

EXERCÍCIOS

- 1) Dentre as afirmativas a seguir, qual define lógica?
- A) Ramo da filosofia que visa discutir as formas de pensamento, bem como verificar se algo é verdadeiro ou falso.
- B) Lógica consiste em discutir se algo é verdadeiro.
- C) Lógica é o processo de pegar uma informação ordenada com regras e desarrumá-la. Aumentando, assim, a entropia, segunda lei da termodinâmica.
- D) Lógica não tem uma definição formal e, portanto, não pode ser usada.
- E) Filosofia africana que foi incorporada pela Europa, lógica tem por definição a organização das ideias por meio de regras e de verificação da veracidade das informações, também por intermédio das regras.



C)
$$3+3=11$$

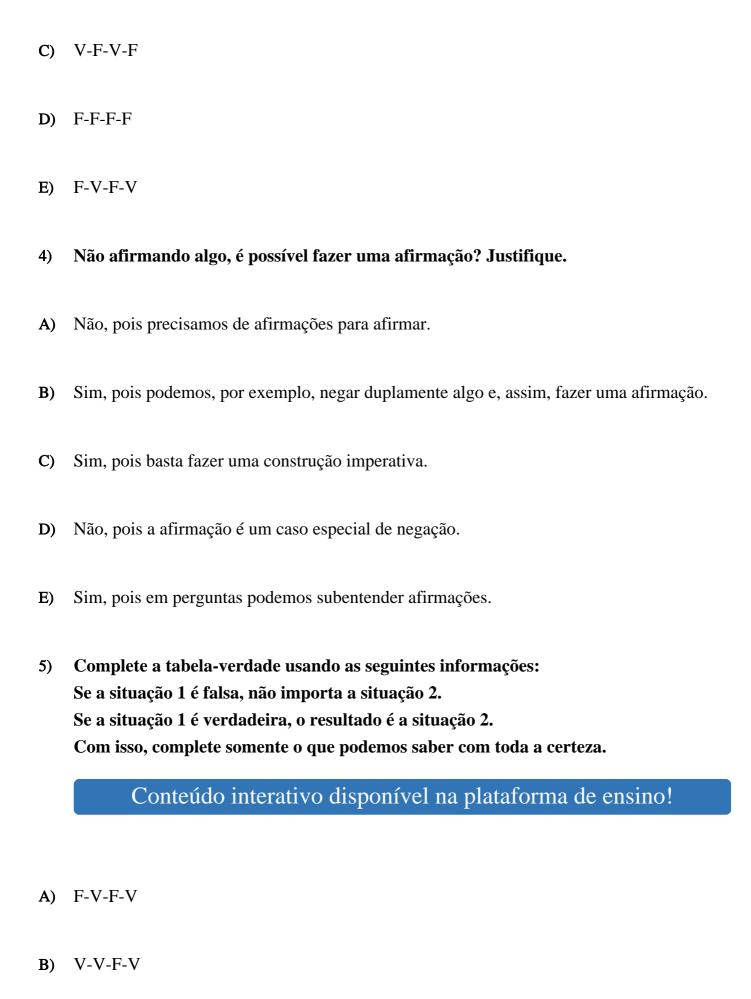
- **D)** Não podemos concluir o resultado de 3 + 3, pois não há informações suficientes para induzirmos uma regra.
- E) 2+2=5 4=5, portanto, 5=6 e logo todos os números são iguais.
- 3) Usando a notação do cálculo proposicional e da lógica como um todo, aponte os resultados das seguintes sentenças lógicas (obs.: "a" é o conjunto dos números naturais e "b" é o conjunto dos números inteiros), marcando V (verdadeiro) ou F (falso).

1. ()
$$2+3=2$$
 ou 5

2. ()
$$1+4>3$$
 e $1+4>5$

- 3. () a está contido em b
- 4. () b está contido em a

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.



- C) F-F-F-V
- D) F-F-Não sabemos-Não sabemos
- E) Não sabemos-Não sabemos-F-V



Juliano e Gabriel adoram jogar damas. Ao contrário da maior parte das crianças da idade deles, que preferem jogos eletrônicos, os dois jogam damas quase todas as tardes, depois da saída da escola. Nas reuniões de pais, a professora sempre fala para as mães dos meninos que eles, em geral, se saem melhor e são mais rápidos ao resolver problemas em que o raciocínio lógico é mais exigido.



Agora é a vez de Juliano jogar e, apesar de já ter comido várias peças do adversário, ele precisa se concentrar para decidir qual será a próxima jogada para alcançar o restante das tão cobiçadas peças da última fileira!



Desde cedo, ainda que sem consciência disso, já iniciamos o desenvolvimento do raciocínio lógico. Você pode perceber que, mesmo sendo um jogo aparentemente simples, a dama pede que os participantes se concentrem em busca do melhor resultado: eliminar o máximo de peças possível do adversário. Mecanismos lógicos são acionados, e isso contribui para o crescimento psíquico do indivíduo, cuja complexidade vai se intensificando de acordo com os estímulos oferecidos.



Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Tabelas-verdade: Com aplicações para operações em conjuntos.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

James Randi e seu feroz combate à fraude psíquica

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Como jogar Sudoku.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Regras do xadrez.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!